ENS de Lyon — Algèbre 1
L3 — 2023-2024

TD 9 : Endomorphismes symétriques et produit tensoriel

Les exercices marqués d'un  seront corrigés en TD, si le temps le permet.

Sauf mention du contraire, K désigne un corps quelconque, et tous les espaces vectoriels sont des K-espaces vectoriels.

Exercice 1. (Décomposition polaire)
On considère l'application

$$p : \left| \begin{array}{ccc} O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) & \longmapsto & OS \end{array} \right. .$$

1. Montrer que l'application p est bijective. (On utilisera le fait que toute matrice symétrique définie positive admet une unique racine carrée symétrique définie positive.)
2. **(a)** Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est compact.
   (b) Montrer que l'adhérence de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est égale à $S_n^{+}(\mathbb{R})$.
   (c) Montrer que l'application p est un homéomorphisme.

Exercice 2. (Deux conséquences de la décomposition polaire)

1. Grâce à la décomposition polaire, montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal (pour l'inclusion) de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
2. **(a)** Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.
   (b) En déduire qu'une décomposition similaire existe encore sur $M_n(\mathbb{R})$. Est-elle unique ?

Exercice 3. (Une matrice symétrique non diagonalisable)
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{C})$. Montrer que A n'est pas diagonalisable.

Exercice 4. (Codiagonalisation)
Soient $M, N \in S_n(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques telles que $MN = NM$.

1. Montrer que tout sous-espace propre de M est stable par N.
2. En déduire qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ telle que M et N soient diagonales dans cette base (on dit que M et N sont *codigonalisables*).

Exercice 5. (Une matrice orthosymétrique)
On considère la matrice

$$M = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que M est une matrice orthogonale et symétrique. Sans calculer son polynôme caractéristique, justifier que M est diagonalisable, déterminer ses valeurs propres avec multiplicité, et calculer son polynôme minimal.

Exercice 6. (Nilpotence)
Soit $N \in M_n(\mathbb{R})$ nilpotente qui commute avec sa transposée. Montrer que $N = 0$.

Exercice 7. (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt et décomposition QR)
Soit (E, q) un $\mathbb{R}$-espace quadratique et on suppose q définie positive. Soient $(b_1, \ldots, b_d)$ une famille de d vecteurs linéairement indépendants de E. On se propose de démontrer qu'il existe une unique famille de d vecteurs $(b'_1, \ldots, b'_d)$ vérifiant les propriétés suivantes :

P1 La famille $(b'_1, \ldots, b'_d)$ est q-orthonormale.

P2 $\mathrm{Vect}(b'_1, \ldots, b'_d) = \mathrm{Vect}(b_i, \ldots, b_d)$.

C'est-à-dire que l'on cherche à construire famille orthonormale à partir d'une famille libre de vecteurs. On procède par analyse-synthèse. Supposons qu'une famille $(b'_1, \ldots, b'_d)$ vérifiant **P1** et **P2** existe.

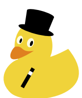
1. Montrer que $b'_1 = \frac{1}{q(b_1)} b_1$.
2. Soit $i \in [\![2, d]\!]$. On écrit $b'_i = \mu_{i,i} b_i + \sum_{j<i} \mu_{j,i} b'_j$ avec $\mu_{i,j} \in \mathbb{R}$. Montrer que l'on doit avoir pour tout $j \in [\![1, i-1]\!]$, $\mu_{j,i} = -\mu_{i,i}\phi(b_i, b'_j)$.
3. Montrer l'existence d'une famille $(b'_i)_i$ vérifiant **P1** et **P2**.
4. Montrer que si l'on rajoute la condition

   P3 Pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, $\phi(b_i, b'_i) > 0$.

   alors il existe la famille $(b'_i)_i$ est unique.
5. Application : Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. En appliquant l'orthonormalisation de Gram-Schmidt aux colonnes de A, montrer qu'il existe une matrice orthogonale $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure R telle que $A = QR$. Donner l'expression de Q et de R en fonction des vecteurs b_i et b'_i.

Exercice 8. (Tenseurs simples)
Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie supérieure à 2.

1. Donner un élément de $E \otimes F$ qui n'est pas un tenseur simple.
2. Donner un exemple d'application linéaire h de $E \otimes F$ dans un espace vectoriel G telle que $h(x \otimes y) \neq 0$ pour tout x de $E \setminus \{0\}$ et y de $F \setminus \{0\}$ mais qui n'est pas injective.
3. Que se passe-t-il si E ou F est de dimension 1 ?



Exercice 9. (Isomorphismes canoniques)
Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.

1. **(a)** Montrer que l'application $E \times F \to F \otimes E$ donnée par $(x, y) \mapsto y \otimes x$ est bilinéaire. En déduire l'existence et l'unicité d'une application linéaire $f : E \otimes F \to F \otimes E$ vérifiant $f(x \otimes y) = y \otimes x$ pour tout $x \in E$ et $y \in F$.
   On construit de même $g : F \otimes E \to E \otimes F$ telle que $g(y \otimes x) = x \otimes y$.

   (b) Montrer que $f \circ g$ est l'identité de $F \otimes E$ et $g \circ f$ est l'identité de $E \otimes F$.

2. Montrer qu'on a un isomorphisme canonique $\gamma : E^* \otimes F^* \cong (E \otimes F)^*$.

Exercice 10. (Propriété universelle)

Soient E et F des espaces vectoriels et soient $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in E^n$ et $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in F^n$. En utilisant la propriété universelle du produit tensoriel, montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i = 0$$

dans $E \otimes F$ si et seulement si pour toute forme bilinéaire $f : E \times F \to K$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) = 0.$$

Exercice 11. (Trace et évaluation)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

1. Montrer qu'il existe une application linéaire $\mathrm{ev} : E \otimes E^* \to k$ telle que pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in E^*$,
$$\mathrm{ev}(x \otimes \lambda) = \lambda(x).$$

2. On identifie k et k^*. Vérifier que la transposée de ev est l'application $\lambda \mapsto \lambda \cdot \mathrm{ev}$.

3. Soit $\gamma : (E \otimes E^*)^* \to E^* \otimes E^{**}$ l'isomorphisme de l'exercice 9. Soit (e_i) une base de E. Montrer que l'on a
$$\gamma(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(\cdot \otimes e_i) \otimes \varphi(e_i^* \otimes \cdot).$$

4. On définit l'application linéaire $c : k \to E^* \otimes E$ par

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, "{}^t\mathrm{ev}"] \arrow[rrr, bend right, "c"'] & (E \otimes E^*)^* \arrow[r, "\gamma"] & E^* \otimes E^{**} \arrow[r, "\mathrm{Id} \otimes \tau"] & E^* \otimes E. \end{tikzcd}$$

où τ est l'isomorphisme $E^{**} \cong E$ de bidualité. Montrer à l'aide des questions précédentes que $c(1) = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i^* \otimes e_i$.

5. Soit $f \in \mathrm{End}(E)$. Montrer que la composée

$$k \xrightarrow{c} E^* \otimes E \xrightarrow{\mathrm{Id} \otimes f} E^* \otimes E \xrightarrow{\mathrm{ev}} k$$

est égale à la multiplication par la trace de f.

6. En déduire que $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}({}^t f)$ et $\mathrm{Tr}(u \otimes v) = \mathrm{Tr}(u)\,\mathrm{Tr}(v)$ (pour la deuxième question on pourra remarquer que l'identification $k \otimes k = k$ est en fait l'application $a \otimes b \mapsto a \times b$).

Exercice 12. (Exactitude du produit tensoriel)

Soient E, F, G, et P des espaces vectoriels.

1. On suppose qu'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} G \longrightarrow 0$$

c'est-à-dire que f est injective, g est surjective, et que $\ker(g) = \mathrm{Im}(f)$. Montrer que la suite

$$0 \longrightarrow F \otimes P \xrightarrow{f \otimes \mathrm{Id}} E \otimes P \xrightarrow{g \otimes \mathrm{Id}} G \otimes P \longrightarrow 0$$

est exacte.

2. Réciproquement, montrer que si on a $f : F \to E$ et $g : E \to G$ telles que la suite

$$0 \longrightarrow F \otimes P \xrightarrow{f \otimes \mathrm{Id}} E \otimes P \xrightarrow{g \otimes \mathrm{Id}} G \otimes P \longrightarrow 0$$

est exacte, alors la suite $0 \longrightarrow F \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} G \longrightarrow 0$ est exacte.

Exercice 13. (Algèbres et produits tensoriels)

On dit que $(A, +, \cdot, \times)$ est une K-algèbre si :

(a) $(A, +, \cdot)$ est un K-espace vectoriel

(b) la loi $\times$ est une application bilinéaire de $A \times A$ dans A.

Soient A et B des K-algèbres.

1. Montrer qu'il existe une application bilinéaire $m : (A \otimes B) \times (A \otimes B) \to A \otimes B$ vérifiant

$$m(a \otimes b, a' \otimes b') = (aa') \otimes (bb')$$

2. Montrer que m munit $A \otimes B$ d'une structure de K-algèbre.

3. Montrer que les K-algèbres $K[X] \otimes K[Y]$ et $K[X, Y]$ sont isomorphes.

4. Montrer que le morphisme naturel de K-algèbres de $K(X) \otimes K(Y)$ vers $K(X, Y)$ est injectif mais non surjectif.